Printed Pages – 8

AI-1108

B. A./B.S.c (Part-I)

Term End Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : Third

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : *सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्नों को हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

*Note : Attempt all **five** questions. **Two** question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.*

इकाई-I
Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिये कि—

$$[l\ m\ n]\,[a\ b\ c] = \begin{vmatrix} l\cdot a & l\cdot b & l\cdot c \\ m\cdot a & m\cdot b & m\cdot c \\ n\cdot a & n\cdot b & n\cdot c \end{vmatrix}$$

Prove that :

$$[l\ m\ n]\,[a\ b\ c] = \begin{vmatrix} l\cdot a & l\cdot b & l\cdot c \\ m\cdot a & m\cdot b & m\cdot c \\ n\cdot a & n\cdot b & n\cdot c \end{vmatrix}$$

(b) $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का बिन्दु $P\,(1, 1, -1)$ पर $2i + j - k$ की दिशा में दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए। दिक्-अवकलज का बिन्दु P पर अधिकतम मान भी ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ in the direction of the vector $2i + j - k$ at the point $P\,(1, 1, -1)$. Also find the maximum value of directional derivative at P.

(c) सिद्ध कीजिए कि—

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

Prove that :

$$\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).$$

इकाई–II
Unit-II

2. (a) यदि $\vec{a} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$ तब सिद्ध कीजिए कि–

$$\int_1^2 \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)dt = \frac{-87}{2}\hat{i} - \frac{44}{3}\hat{j} + \frac{15}{2}\hat{k}.$$

If $\vec{a} = t\hat{i} - 3\hat{j} + 2t\hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} - \hat{k}$ then prove that :

$$\int_1^2 \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)dt = \frac{-87}{2}\hat{i} - \frac{44}{3}\hat{j} + \frac{15}{2}\hat{k}.$$

(b) $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{F} = 4xzi - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ एवं S समतलों $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ से घिरे घन का पृष्ठ हैं।

Evaluate $\iint_s \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$, where $\vec{F} = 4xzi - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube

bounded by planes $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

(c) फलन $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ के लिए स्टॉक के प्रमेय को सिद्ध कीजिए जबकि समाकल को $x = \pm a, y = 0, y = b$ से उस आयत के परित: लिया जाए।

Verify stoke's theorem for $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ taken around the rectangle bounded by $x = \pm a, y = 0, y = b$.

इकाई–III
Unit-III

3. (a) शांकव $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$.

(b) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु

से खींचे गये अतिपरवलय का समीकरण, जिसका उत्केन्द्र कोण 'α' है और जो दीर्घवृत्त से संनाभि है, $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = a^2 - b^2$ है।

Prove that the equation to the hyperbola drawn throgh point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, whose eccentric angle is 'α' and which is confocal with the ellipse is

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = a^2 - b^2.$$

(c) उस शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभि ध्रुव है, उत्केन्द्रता e है एवं नाभिलंब जीवा $2l$ है।

Find the polar eq. of a conic whose focus is pole, eccentricity is e and latus-rectum is $2l$.

इकाई-IV
Unit-IV

4. (a) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाने वाले और समतल $4x + 3y - 15 = 0$ को स्पर्श करने वाले गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of sphers passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ x + 2y + 3z = 3$ and touch the plane $4x + 3y - 15 = 0$.

(b) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका शीर्ष (5, 4, 3) एवं आधार $3x^2 + 2y^2 = 6,\ \ y + z = 0$ है।

Find the equation of cone, whose vertex is (5, 4, 3) and base curve is $3x^2 + 2y^2 = 6$, $y + z = 0$.

(c) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा अक्ष रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius is 2 and axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

इकाई-V
Unit-V

5. (a) प्रतिबंध ज्ञात करो जबकि समतल $lx + my + nz = p$ परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करता है।

To find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ may touch the parabolid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

(b) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$, के बिन्दु (1, 2, –3) से होकर ज़ाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of generating lines of the

hyperboloid $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$, which pass through the point (1, 2, –3)

समीकरण का $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$ समानयन प्रामाणिक रूप का समानयन प्रामाणिक रूप में कीजिए तथा शांकवज की प्रकृति बताइए।

Reduce the equation $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$ to the standard form and state the nature of the conicoid.